

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 56 1. Докажіть, що  $8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 2$ .
- 56 2. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + m$ , де  $m$  - дійсне число. Знайдіть дійсне число  $m$  для якого  $(f \circ f)(0) = 4$ .
- 56 3. Розв'яжіть у множині дійсних чисел рівняння  $3 \cdot 2^{2x} + 4^x = 4$ .
- 56 4. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи число з множини двоцифрових натуральних чисел, цифра десятків є дільником числа 6.
- 56 5. У декартовому репері  $xOy$  розглядають пряму  $d$  задана рівнянням  $y = 3x - 2$  і точку  $A(a, a)$ , де  $a$  - дійсне число. Визначте дійсне число  $a$  знаючи, що точка  $A$  належить прямій  $d$ .
- 56 6. Розглядають рівнобедрений трикутник  $ABC$ , у якому  $AB = 10$  і  $\cos A = 0$ . Докажіть, що площа трикутника  $ABC$  дорівнює 50.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матрицю  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , де  $x$  - дійсне число.
- 56 а) Докажіть, що  $\det(A(1)) = 1$ .
- 56 б) Докажіть, що  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ , для будь-яких дійсних чисел  $x$  та  $y$ .
- 56 в) Знайдіть натуральне число  $n$  для якого  $A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(2n^2)$ .
2. На множині  $M = [0, +\infty)$  задають закон композиції  $x * y = \frac{2x}{y+2} + \frac{2y}{x+2}$ .
- 56 а) Докажіть, що  $1 * 0 = 1$ .
- 56 б) Докажіть, що  $e = 0$  - нейтральний елемент для закону композиції „\*”.
- 56 в) Знайдіть  $x \in M$ ,  $x$  не дорівнює нулю, для якого  $x * \frac{4}{x} = x$ .

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - x}$ .
- 56 а) Докажіть, що  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 56 б) Визначте інтервали монотонності для функції  $f$ .
- 56 в) Докажіть, що для будь-якого  $m \in (1, 2]$ , рівняння  $f(x) = m$  має єдиний розв'язок.

2. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 + 9}$ .

56 a) Докажіть, що  $\int_1^5 (f(x) - \sqrt{x^2 + 9}) dx = 0$ .

56 b) Докажіть, що  $\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = 2$ .

56 c) Для кожного ненульового натурального числа  $n$  розглядають число  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$ . Докажіть, що  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .