Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=\sqrt{2}$ și $b_2=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real nenul m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}-3^x-6\cdot 3^{x-1}=6$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $2n-60$ să aparțină mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C, mijlocul segmentului AB. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu $120°$ și $AB=6$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $2*5=8$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\dfrac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0)=0$.